Métodos Matemáticos I
Funciones holomorfas

Javier Pérez González

Universidad de Granada
Departamento de Análisis Matemático

November 11, 2012

- Las funciones complejas no son más que las funciones definidas en subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ con valores en $\mathbb{R}^2$, cuando en $\mathbb{R}^2$ consideramos su estructura compleja.

- Las funciones complejas no son más que las funciones definidas en subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ con valores en $\mathbb{R}^2$, cuando en $\mathbb{R}^2$ consideramos su estructura compleja.

- Sea $A \subset \mathbb{C}$. A toda función compleja $f : A \to \mathbb{C}$ se le asocian dos funciones reales: $u = \operatorname{Re} f$ "parte real de f" y $v = \operatorname{Im} f$ "parte imaginaria de f" definidas para todo $(x, y) = x + iy \in A$ por:

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy), \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$$

  Naturalmente, $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$.

- Las funciones complejas no son más que las funciones definidas en subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ con valores en $\mathbb{R}^2$, cuando en $\mathbb{R}^2$ consideramos su estructura compleja.

- Sea $A \subset \mathbb{C}$. A toda función compleja $f : A \to \mathbb{C}$ se le asocian dos funciones reales: $u = \operatorname{Re} f$ "parte real de f" y $v = \operatorname{Im} f$ "parte imaginaria de f" definidas para todo $(x, y) = x + iy \in A$ por:

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy), \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$$

  Naturalmente, $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$.

- La *función conjugada* de f es la función $\overline{f}$ dada por $\overline{f}(z) = \operatorname{Re} f(z) - i \operatorname{Im} f(z)$. La *función módulo* de f es la función $|f|$ dada por $|f|(z) = |f(z)|$.

Continuidad

- $f : A \to \mathbb{C}$ es *continua* en un punto $a \in A$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\left.\begin{array}{c} z \in A \\ |z - a| < \delta \end{array}\right\} \Longrightarrow |f(z) - f(a)| < \varepsilon.$$

Continuidad

- $f : A \to \mathbb{C}$ es *continua* en un punto $a \in A$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\left.\begin{array}{c} z \in A \\ |z - a| < \delta \end{array}\right\} \Longrightarrow |f(z) - f(a)| < \varepsilon.$$

- Usando una vez más las desigualdades

$$\max\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\} \leqslant |z| \leqslant |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$$

se prueba fácilmente que una función compleja f es continua en a si, y sólo si, las funciones $\operatorname{Re} f$ y $\operatorname{Im} f$ son continuas en a.

Límite funcional

- Dado un punto a de acumulación de A, se dice $f : A \to \mathbb{C}$ tiene *límite* en a si hay un número complejo $L \in \mathbb{C}$ con la propiedad de que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\left.\begin{array}{c} z \in A \\ 0 < |z - a| < \delta \end{array}\right\} \Longrightarrow |f(z) - L| < \varepsilon.$$

Simbólicamente escribimos $\lim\limits_{z \to a} f(z) = L$.

Límite funcional

- Dado un punto a de acumulación de A, se dice $f : A \to \mathbb{C}$ tiene *límite* en a si hay un número complejo $L \in \mathbb{C}$ con la propiedad de que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\left.\begin{array}{c} z \in A \\ 0 < |z - a| < \delta \end{array}\right\} \Longrightarrow |f(z) - L| < \varepsilon.$$

  Simbólicamente escribimos $\lim\limits_{z \to a} f(z) = L$.

- Usando las desigualdades anteriores y llamando $a = \alpha + i\,\beta$, $L = \lambda + i\mu$ tenemos

$$\lim_{z \to a} f(z) = L \iff \begin{cases} \lim\limits_{(x,y)\to(\alpha,\beta)} \operatorname{Re} f(x,y) = \lambda \\ \lim\limits_{(x,y)\to(\alpha,\beta)} \operatorname{Im} f(x,y) = \mu \end{cases}$$

Límites infinitos y en infinito

Sea $f : A \to \mathbb{C}$ y $a \in A'$ un punto de acumulación de A.

Límites infinitos y en infinito

Sea $f : A \to \mathbb{C}$ y $a \in A'$ un punto de acumulación de A.

- $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$ quiere decir que para todo $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\left.\begin{array}{c} z \in A \\ 0 < |z-a| < \delta \end{array}\right\} \Longrightarrow |f(z)| > M$$

Límites infinitos y en infinito

Sea $f : A \to \mathbb{C}$ y $a \in A'$ un punto de acumulación de A.

- $\lim\limits_{z \to a} f(z) = \infty$ quiere decir que para todo $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\left.\begin{array}{c} z \in A \\ 0 < |z - a| < \delta \end{array}\right\} \Longrightarrow |f(z)| > M$$

- $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = L$ quiere decir que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $K > 0$ tal que si $z \in A$ y $|z| > K$ entonces $|f(z) - L| < \varepsilon$.

Sea $f : A \to \mathbb{C}$ y $a \in A'$ un punto de acumulación de A.

- $\lim_{z \to a} f(z) = \infty$ quiere decir que para todo $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que
$$\left.\begin{array}{c} z \in A \\ 0 < |z - a| < \delta \end{array}\right\} \Longrightarrow |f(z)| > M$$
- $\lim_{z \to \infty} f(z) = L$ quiere decir que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $K > 0$ tal que si $z \in A$ y $|z| > K$ entonces $|f(z) - L| < \varepsilon$.
- $\lim_{z \to \infty} f(z) = \infty$ quiere decir que para todo $M > 0$ existe $K > 0$ tal que si $z \in A$ y $|z| > K$ entonces $|f(z)| > M$.

Continuidad del argumento principal

Hay una completa analogía formal entre las definiciones anteriores y las correspondientes para funciones reales de una variable real. Por ello, *las reglas de cálculo de límites conocidas para funciones de una variable real son también válidas para funciones de variable compleja.*

Continuidad del argumento principal

Hay una completa analogía formal entre las definiciones anteriores y las correspondientes para funciones reales de una variable real. Por ello, *las reglas de cálculo de límites conocidas para funciones de una variable real son también válidas para funciones de variable compleja.*

La función argumento principal es continua en $\mathbb{C}^*\backslash\mathbb{R}^-$ y es discontinua en $\mathbb{R}^-$.

Derivada de una función compleja

Sea $f : A \to \mathbb{C}$ y $a \in A \cap A'$.

Derivada de una función compleja

Sea $f : A \to \mathbb{C}$ y $a \in A \cap A'$.

- Se dice que f es derivable en a cuando existe el límite

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \in \mathbb{C}$$

  el valor de dicho límite se llama *derivada de f en el punto a*, y se representa por $f'(a)$.

Derivada de una función compleja

Sea $f : A \to \mathbb{C}$ y $a \in A \cap A'$.

- Se dice que f es derivable en a cuando existe el límite

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \in \mathbb{C}$$

  el valor de dicho límite se llama *derivada de f en el punto a*, y se representa por $f'(a)$.

- La única novedad de la definición es que se está utilizando el producto complejo y eso, como veremos, hace que la condición de derivabilidad en sentido complejo sea mucho más restrictiva que la derivabilidad para funciones reales.

Casos particulares

- Cuando $A \subseteq \mathbb{R}$ y $f(A) \subseteq \mathbb{R}$, la definición dada coincide con la conocida para una función real de variable real.

Casos particulares

- Cuando $A \subseteq \mathbb{R}$ y $f(A) \subseteq \mathbb{R}$, la definición dada coincide con la conocida para una función real de variable real.
- Para funciones complejas de una variable real se tiene el siguiente resultado.
  Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y $f : A \to \mathbb{C}$. Entonces la función f es de la forma

$$f(t) = u(t) + iv(t)$$

donde u y v son funciones reales de variable real. En este caso tenemos:

$$\frac{f(t) - f(a)}{t - a} = \frac{u(t) - u(a)}{t - a} + i\frac{v(t) - v(a)}{t - a}$$

y deducimos que f es derivable en a si, y sólo si, las funciones u y v son derivables en a, en cuyo caso

$$f'(a) = u'(a) + iv'(a)$$

Reglas de derivación

Sean $f, g : A \to \mathbb{C}$, $a \in A \cap A'$ y supongamos que f y g son derivables en a. Entonces:

- $f + g$ es derivable en a y $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.

Reglas de derivación

Sean $f, g : A \to \mathbb{C}$, $a \in A \cap A'$ y supongamos que f y g son derivables en a. Entonces:

- $f + g$ es derivable en a y $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.
- fg es derivable en a y $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

Reglas de derivación

Sean $f, g : A \to \mathbb{C}$, $a \in A \cap A'$ y supongamos que f y g son derivables en a. Entonces:

- $f + g$ es derivable en a y $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.
- fg es derivable en a y $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.
- Si $g(z) \neq 0$ para todo $z \in A$, entonces f/g es derivable en a

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$$

Derivación de una función compuesta

Sean $f : A \to \mathbb{C}$ y $g : B \to \mathbb{C}$ tales que $f(A) \subseteq B$, y sea $h = g \circ f : A \to \mathbb{C}$ la función compuesta.

Derivación de una función compuesta

Sean $f : A \to \mathbb{C}$ y $g : B \to \mathbb{C}$ tales que $f(A) \subseteq B$, y sea $h = g \circ f : A \to \mathbb{C}$ la función compuesta.

Supongamos que f es derivable en $a \in A \cap A'$ y g es derivable en $f(a) \in B \cap B'$. Entonces h es derivable en a y

$$h'(a) = g'\big(f(a)\big)f'(a)$$

Ecuaciones de Cauchy–Riemann

Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto, $a \in \Omega$ y $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Pongamos $a = \alpha + i\beta$, $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$. Equivalen las siguientes afirmaciones:

Ecuaciones de Cauchy–Riemann

Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto, $a \in \Omega$ y $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Pongamos $a = \alpha + i\beta$, $u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy)$, $v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy)$. Equivalen las siguientes afirmaciones:

- f es derivable (en sentido complejo) en a.

Ecuaciones de Cauchy–Riemann

Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto, $a \in \Omega$ y $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Pongamos $a = \alpha + i\beta$, $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$. Equivalen las siguientes afirmaciones:

- f es derivable (en sentido complejo) en a.
- Las funciones u, v son diferenciables en (α, β) y además se verifican las condiciones de Cauchy–Riemann:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(\alpha, \beta) &= \frac{\partial v}{\partial y}(\alpha, \beta) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(\alpha, \beta) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(\alpha, \beta) \end{aligned}}$$

Ecuaciones de Cauchy–Riemann

Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto, $a \in \Omega$ y $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Pongamos $a = \alpha + i\beta$, $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$. Equivalen las siguientes afirmaciones:

- f es derivable (en sentido complejo) en a.
- Las funciones u, v son diferenciables en (α, β) y además se verifican las condiciones de Cauchy–Riemann:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(\alpha, \beta) &= \frac{\partial v}{\partial y}(\alpha, \beta) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(\alpha, \beta) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(\alpha, \beta) \end{aligned}}$$

Ecuaciones de Cauchy–Riemann

Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto, $a \in \Omega$ y $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Pongamos $a = \alpha + i\beta$, $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$. Equivalen las siguientes afirmaciones:

- f es derivable (en sentido complejo) en a.
- Las funciones u, v son diferenciables en (α, β) y además se verifican las condiciones de Cauchy–Riemann:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(\alpha, \beta) &= \frac{\partial v}{\partial y}(\alpha, \beta) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(\alpha, \beta) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(\alpha, \beta) \end{aligned}}$$

Cuando se cumplen estas condiciones se tiene

$$\boxed{f'(a) = \frac{\partial u}{\partial x}(\alpha, \beta) + i\frac{\partial v}{\partial x}(\alpha, \beta)}$$

Funciones holomorfas

Sea Ω un abierto no vacío de $\mathbb{C}$. Una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ se dice que es *holomorfa* en Ω si f es derivable en todo punto de Ω.

Sea Ω un abierto no vacío de $\mathbb{C}$. Una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ se dice que es *holomorfa* en Ω si f es derivable en todo punto de Ω.

En tal caso la función definida para $z \in \Omega$ por $z \mapsto f'(z)$ se llama *función derivada* de f.

Funciones holomorfas

Sea Ω un abierto no vacío de $\mathbb{C}$. Una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ se dice que es *holomorfa* en Ω si f es derivable en todo punto de Ω.

En tal caso la función definida para $z \in \Omega$ por $z \mapsto f'(z)$ se llama *función derivada* de f.

Notaremos por $\mathcal{H}(\Omega)$ el conjunto de todas las funciones holomorfas en Ω.

Funciones holomorfas

Sea Ω un abierto no vacío de $\mathbb{C}$. Una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ se dice que es *holomorfa* en Ω si f es derivable en todo punto de Ω.

En tal caso la función definida para $z \in \Omega$ por $z \mapsto f'(z)$ se llama *función derivada* de f.

Notaremos por $\mathcal{H}(\Omega)$ el conjunto de todas las funciones holomorfas en Ω.

Las funciones holomorfas en todo el plano complejo se llaman *funciones enteras*.

Ejemplos de funciones holomorfas

- Las *funciones polinómicas*, es decir, las funciones de la forma

$$p(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n$$

donde $c_k \in \mathbb{C}$ para $0 \leqslant k \leqslant n$, son funciones enteras. La función derivada de p viene dada por

$$p'(z) = c_1 + 2c_2 z + 3c_3 z^2 + \cdots + nc_n z^{n-1} \qquad (z \in \mathbb{C})$$

Ejemplos de funciones holomorfas

- Las *funciones polinómicas*, es decir, las funciones de la forma

$$p(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n$$

donde $c_k \in \mathbb{C}$ para $0 \leqslant k \leqslant n$, son funciones enteras. La función derivada de p viene dada por

$$p'(z) = c_1 + 2c_2 z + 3c_3 z^2 + \cdots + nc_n z^{n-1} \qquad (z \in \mathbb{C})$$

- Las *funciones racionales*, es decir, las funciones de la forma $R(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ donde $p(z)$ y $q(z)$ son funciones polinómicas, son holomorfas en su dominio natural de definición $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : q(z) \neq 0\}$. La función derivada de R viene dada por

$$R'(z) = \frac{p'(z)q(z) - p(z)q'(z)}{q(z)^2} \qquad (z \in \Omega)$$

- El conjunto $\mathcal{H}(\Omega)$ de las funciones holomorfas en un abierto Ω con la suma y el producto usual de funciones es un álgebra.

- El conjunto $\mathscr{H}(\Omega)$ de las funciones holomorfas en un abierto Ω con la suma y el producto usual de funciones es un álgebra.
- Una función holomorfa en un dominio cuya derivada es nula en todo punto es constante.

- El conjunto $\mathscr{H}(\Omega)$ de las funciones holomorfas en un abierto Ω con la suma y el producto usual de funciones es un álgebra.
- Una función holomorfa en un dominio cuya derivada es nula en todo punto es constante.
- Si dos funciones holomorfas tienen la misma derivada en un dominio y coinciden en un punto del mismo son iguales en dicho dominio.

Primeras propiedades de las funciones holomorfas

Sean Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Equivalen las siguientes afirmaciones:

- $\operatorname{Re} f$ es constante en Ω.

Sean Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Equivalen las siguientes afirmaciones:

- $\operatorname{Re} f$ es constante en Ω.
- $\operatorname{Im} f$ es constante en Ω.

Sean Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Equivalen las siguientes afirmaciones:

- $\operatorname{Re} f$ es constante en Ω.
- $\operatorname{Im} f$ es constante en Ω.
- La función compleja conjugada de f, $\overline{f}$, es holomorfa en Ω.

Primeras propiedades de las funciones holomorfas

Sean Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Equivalen las siguientes afirmaciones:

- $\operatorname{Re} f$ es constante en Ω.
- $\operatorname{Im} f$ es constante en Ω.
- La función compleja conjugada de f, $\overline{f}$, es holomorfa en Ω.
- f es constante en Ω.

Primeras propiedades de las funciones holomorfas

Sean Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Equivalen las siguientes afirmaciones:

- $\operatorname{Re} f$ es constante en Ω.
- $\operatorname{Im} f$ es constante en Ω.
- La función compleja conjugada de f, $\overline{f}$, es holomorfa en Ω.
- f es constante en Ω.
- $|f|$ es constante en Ω.